$2^{\underline{o}}$ esonero di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica – Soluzioni
28–11–05

Problema n.1

1.1) In tutti i casi abbiamo $f(x) = (ax+b)^2 + c$ con $x \in [0, L]$. La funzione dispari cercata è $F(x) = \begin{cases} (ax+b)^2 + c & 0 \le x \le L \\ -(-ax+b)^2 - c & -L \le x \le 0 \end{cases}$ ($x = 0$ non è presente nella parte inferiore se $f(0) \neq 0$) e la periodica è $F(x-2Lk)$ se $-L+2kL \le x \le L+2kL$. La serie di Fourier è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(x\frac{\pi k}{L}) q_k$ dove $q_k = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} dx \sin(x\frac{k\pi}{L}) F(x) = \frac{4}{L}\int_0^L dx \sin(x\frac{k\pi}{L}) f(x)$ e si ottiene

$A: -\frac{2}{(k\pi)^3}\big(18 - (k\pi)^2 + (-)^k(4\pi^2k^2 - 18)\big),$
$B: -\frac{2}{(k\pi)^3}\big(32 - 3(k\pi)^2 + (-)^k(11\pi^2k^2 - 32)\big),$
$C: -\frac{4}{(k\pi)^3}\big(16 - (k\pi)^2 + (-)^k(5\pi^2k^2 - 16)\big),$
$D: -\frac{2}{(k\pi)^3}\big(18 - 4(k\pi)^2 + (-)^k(\pi^2k^2 - 18)\big)$

Essendo la funzione $F(x)$ discontinua in almeno un punto, ad esempio l'origine, la serie non può convergere uniformemente su tutta la retta. I punti di discontinuità della $F(x)$ in realtà sono infiniti. Sono tutti i punti di coordinate $x = kL$ con k intero. Gli insiemi in cui la serie converge unif0rmemente sono, ad esempio, tutti gli intervalli che non contengono al loro interno alcun punto di discontinuità . Si badi però che nell'insieme $[\varepsilon, L-\varepsilon] \cup \{0\}$ con $0 < \varepsilon < \frac{L}{2}$ la *convergenza è uniforme* in quanto in tale insieme $F'(x)$ è continua.

La convergenza nell'insieme $E = \{-3, 0, 3\}$ è uniforme.

SCRIVERE PER I COEFFICIENTI DI FOURIER LA FORMULA $q_k = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} dx \sin(x\frac{k\pi}{L})((ax+b)^2+c)$ è un grave errore. Scrivere la formula precedente e poi scrivere che è uguale a $q_k = \frac{4}{L}\int_0^L dx \sin(x\frac{k\pi}{L})((ax+b)^2+c)$ comporta un secondo errore poiché le due formule NON SONO uguali anche se l'ultimo integrale dà il risultato giusto. Tali considerazioni valgono tutte le volte che si devono trovare coefficienti di Fourier di funzioni pari oppure dispari.

Problema n.1

1.2) In tutti i casi abbiamo $f(x) = (ax+b)^2 + c$ con $x \in [0, L]$ E INOLTRE $f(-x) = f(x+L)$ (in quanto $b = \frac{L}{2}$). Ciò implica che il periodo minimo della funzione è L e non 2L. La funzione pari cercata è $F(x) = \begin{cases} (ax+b)^2 + c & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ (-ax+b)^2 + c & -\frac{L}{2} \le x \le 0 \end{cases}$ e la periodica è $F(x - Lk)$ se $-L + kL \le x \le L + kL$. La serie di Fourier è $\sum_{k=1}^{+\infty} \cos(x\frac{2\pi k}{L}) q_k$ dove $q_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2k\pi}{L}) F(x) = \frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2k\pi}{L}) f(x)$ e si ottiene

$A: \frac{4}{(2k\pi)^2}$ da cui la serie è $\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(\pi k)^2}\cos k\pi x$

$B: \frac{16}{(2k\pi)^2}$ da cui la serie è $\frac{8}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{(\pi k)^2}\cos \frac{k}{2}\pi x$

$C: \frac{16}{(2k\pi)^2}$ da cui la serie è $\frac{20}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{(\pi k)^2}\cos \frac{k}{2}\pi x$

$D: \frac{4}{(2k\pi)^2}$ da cui la serie è $\frac{14}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(\pi k)^2}\cos k\pi x$

Le serie convergono tutte uniformemente in quanto $F'(x)$ è continua a tratti.

Naturalmente si poteva estendere la funzione in modo pari e dire che il periodo (non minimo) era $2L$. Si sarebbe avuto $F(x) = \begin{cases} (ax+b)^2 + c & 0 \le x \le L \\ (-ax+b)^2 + c & -L \le x \le 0 \end{cases}$ e la periodica è $F(x-2Lk)$ se $-L+2kL \le x \le L+2kL$. La serie di Fourier è $\sum_{k'=1}^{+\infty} \cos(x\frac{\pi k'}{L}) q_{k'}$ dove $q_{k'} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx \cos(x\frac{k'\pi}{L}) F(x) = \frac{2}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{k'\pi}{L}) f(x)$

Bisogna far vedere che i due sviluppi sono uguali. Sia k' pari e quindi $k' = 2p$. $\frac{2}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{2p\pi}{L}) f(x)$. La funzione $\cos(x\frac{2p\pi}{L})$ ha periodo $\frac{L}{p}$ e quindi l'integrale è $\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2p\pi}{L}) f(x)$ e per parità è $\frac{4}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} dx \cos(x\frac{2p\pi}{L}) f(x)$ e tale integrale è uguale a $\frac{4}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{2k\pi}{L}) f(x)$ non appena $k = p$.

Per i valori dispari di k' l'integrale $q_{k'} = \frac{2}{L}\int_0^L dx \cos(x\frac{k'\pi}{L}) F(x)$ è zero in quanto $\cos\frac{\pi}{L}(2p+1)(\frac{L}{2} \pm \varepsilon)$ rimane costante in modulo ma cambia segno con il segno di ε.

Infatti i coefficienti di Fourier sono
$A: \frac{8(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$ $\quad B: \frac{32(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$ $\quad C: \frac{32(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$ $\quad D: \frac{8(1+\cos\pi k')}{(k'\pi)^2}$

Le serie convergono tutte uniformemente in quanto $F(x)$ è continua e $F'(x)$ è continua a tratti.

Problema n.2

Scriviamo la funzione $F(x) = \begin{cases} x(L-x) & 0 \le x \le L \\ x(L+x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$ e la periodica è $F(x-2Lk)$ se $-L+2kL \le x \le L+2kL$. $F(x)$, a seconda dei casi è $\varphi(x)$ resa dispari oppure $\psi(x)$ resa dispari e $F(x)|_{x\in[0,L]} = \varphi(x)$ oppure $F(x)|_{x\in[0,L]} = \psi(x)$

A: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi kx}{2}(A_k \cos c\frac{\pi kt}{2} + B_k \sin c\frac{\pi kt}{2})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = 0$ dà $B_k = 0$ e $A_k = \int_0^2 dx \sin\frac{\pi kx}{2} x(2-x) = \frac{16(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{2} \cos\frac{c\pi(2k+1)t}{2} \frac{32}{(\pi(2k+1))^3}$

B: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi kx}{3}(A_k \cos c\frac{\pi kt}{3} + B_k \sin c\frac{\pi kt}{3})$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $B_k = \frac{3}{\pi kc}\frac{2}{3}\int_0^3 dx \sin\frac{\pi kx}{3} x(3-x) = \frac{72(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{3} \cos\frac{c\pi(2k+1)t}{3} \frac{144}{(\pi(2k+1))^4 c}$

C: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\pi kx(A_k \cos(c\pi kt) + B_k \sin(c\pi kt))$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = 0$ dà $B_k = 0$ e $A_k = 2\int_0^1 dx \sin(\pi kx) x(1-x) = \frac{4(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\pi(2k+1)x \cos c\pi(2k+1)t \frac{8}{(\pi(2k+1))^3}$

D: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi kx}{4}(A_k \cos c\frac{\pi kt}{4} + B_k \sin c\frac{\pi kt}{4})$. L'imposizione delle condizioni iniziali

$u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $B_k = \frac{4}{\pi k c}\frac{1}{2}\int_0^4 dx \sin\frac{\pi k x}{4} x(4-x) = \frac{128(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{4}\cos\frac{c\pi(2k+1)t}{4}\frac{256}{(\pi(2k+1))^4 c}$

Problema n.3

Scriviamo la funzione $F(x) = \begin{cases} x(L-x) & 0 \le x \le L \\ x(L+x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$ e la periodica è $F(x - Lk)$ se $-L + 2kL \le x \le L + 2kL$. $F(x)$ è $\varphi(x)$ resa dispari

A: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{2} A_k e^{-c\frac{\pi k t}{2}}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ dà $A_k = \int_0^2 dx \sin\frac{\pi k x}{2} x(2-x) = \frac{16(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{2} e^{-\frac{c\pi(2k+1)t}{2}}\frac{32}{(\pi(2k+1))^3}$$

B: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{3} A_k e^{-c\frac{\pi k t}{3}}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $A_k = \frac{2}{3}\int_0^3 dx \sin\frac{\pi k x}{3} x(3-x) = \frac{72(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{3} e^{-\frac{c\pi(2k+1)t}{3}}\frac{144}{(\pi(2k+1))^4 c}$$

C: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \pi k x(A_k e^{-c\pi k t}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = 0$ dà $B_k = 0$ e $A_k = 2\int_0^1 dx \sin(\pi k x) x(1-x) = \frac{4(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3}$. La soluzione è quindi $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin \pi(2k+1) x e^{-c\pi(2k+1)t}\frac{8}{(\pi(2k+1))^3}$

D: La soluzione è $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{4} A_k e^{-c\frac{\pi k t}{4}}$. L'imposizione delle condizioni iniziali $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ dà $A_k = 0$ e $A_k = \frac{1}{2}\int_0^4 dx \sin\frac{\pi k x}{4} x(4-x) = \frac{128(1-\cos(k\pi))}{(\pi k)^3(c\pi k)}$. La soluzione è quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{4} e^{-\frac{c\pi(2k+1)t}{4}}\frac{256}{(\pi(2k+1))^4 c}$$

Problema n.4

Le equazioni sono tutte del tipo $\begin{cases} u_t = u_{xx} \pm \sin t & 0 < x < L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t, u(x,0) = 0 \end{cases}$

Si sviluppa in serie di Fourier la funzione, detta $F(x)$ che vale 1 per $0 \le x < L$ e -1 per $-L \le x < 0$ ottenendo $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{L}\frac{2}{\pi k}(1 - \cos\pi k)$

La soluzione si scrive come $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{L} u_k(t)$ e l'equazione da risolvere è $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{L}(u'_k(t) + (\frac{\pi k}{L})^2 u_k(t)) = \pm\sin t \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi k x}{L}\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)$ ossia

$u'_k(t) + (\frac{\pi k}{L})^2 u_k(t) = \pm\sin t\frac{2}{\pi k}(1-\cos\pi k)$. Per k pari diventa $u'_k(t) + (\frac{\pi k}{L})^2 u_k(t) = 0$ e la soluzione è $u_k(t) =$

$u_k(0)e^{-(\frac{\pi k}{L})^2 t}$. Per k dispari diventa $u_k'(t)+(\dfrac{\pi k}{L})^2 u_k(t) = \pm \sin t \dfrac{4}{\pi k}$ e la soluzione è $u_k(t) = \overline{u}_k e^{-(\frac{\pi k}{L})^2 t} \pm \frac{4}{\pi k}\frac{1}{1+(\frac{\pi k}{L})^4}((\frac{\pi k}{L})^2 \sin t - \cos t)$.

Poi va imposta la condizione iniziale $u(x,0) = 0$ ossia $u(x,0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi k x}{L} u_k(0) = 0$ e quindi $u_k(0) = 0$ per ogni k. Per i k pari otteniamo $u_k(0) = 0$ e per i k dispari diventa $\overline{u}_k \mp \dfrac{4}{\pi k}\dfrac{1}{1+(\frac{\pi k}{L})^2 4} = 0$ ossia $\overline{u}_k = \pm \dfrac{4}{\pi k}\dfrac{1}{1+(\frac{\pi k}{L})^4}$

Riassumento si ha $u(x,t) = \pm \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \sin \frac{\pi(2k+1)x}{L} \frac{4}{\pi k} \frac{1}{1+(\frac{\pi k}{L})^4}(e^{-(\frac{\pi k}{L})^2 t} + ((\frac{\pi k}{L})^2 \sin t - \cos t))$

Problema n.5 Si tratta di calcolare il rotore di quattro campi vettoriali.

A: il rotore è dato dal campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x}) = z^2\underline{i} + 3(x^2+y^2)\underline{k}$ e l'integrale da svolgere è $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\leq 1, z=1} dxdy(\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}^e)$ dove $\underline{n}^e = (0,0,1)$ e quindi $3\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\leq 1, z=1} dxdy(x^2+y^2)$. Cambiando variabile si ha $3\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\rho^3 = \frac{3}{2}\pi$

B: $\underline{V}(\underline{x}) = z^2\underline{i} - 3(x^2+y^2)\underline{k}$ e quindi il risultato è $-\dfrac{3}{2}\pi$

C: $\underline{V}(\underline{x}) = (z^2 x)\underline{i}\underline{j}(z^2 y) + \underline{k}(-6x^2 - 3y^2)\underline{k}$ e quindi $3\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\rho^3(-2\cos^2 t - \sin^2 t) = -\frac{9}{4}\pi$

D: $\underline{V}(\underline{x}) = z^2\underline{i} + \underline{k}(3x^2 - 6y^2)\underline{k}$ e quindi $3\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\rho^3(\cos^2 t - 2\sin^2 t) = -\frac{3}{4}\pi$